La conjetura de Goldbach

Por Eddy René Shingre Mora, profesor de Matemática.

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.
Christian Goldbach (1742)

Ejemplos:

$$\mathbf{8} = 3 + 5$$
$$\mathbf{26} = 7 + 19$$
$$\mathbf{34} = 5 + 29$$
$$\mathbf{40} = 17 + 23$$

Definiciones básicas

1. Representación de un número par

Sea $\boldsymbol{a}$ un número *par* donde $\boldsymbol{a} = 2k$ siendo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$

2. Representación de un número impar

Sea $\boldsymbol{a}$ un número *impar* donde $\boldsymbol{a} = 2k - 1$ siendo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$

3. Número primo

Un número *primo* es un número natural (entero positivo), que tiene exactamente *dos* divisores positivos (El *mismo* número y el número 1). También podemos definirlo como aquel número entero positivo que *no* puede expresarse como *producto* de *dos* números enteros positivos *más* pequeños que él, o bien, como producto de dos enteros positivos de más de una forma. Conviene observar que con cualquiera de las dos definiciones el **1** queda excluido del *conjunto* de los números *primos*.

Ejemplos:
a) El 7 *es* primo. Sus únicos divisores son 1 y 7. Sólo puede expresarse como producto de 7×1.
b) El 15 *no es* primo. Sus divisores son 1, 3, 5 y 15. Puede expresarse como 3×5 o como 15×1.

Números primos menores que 100 (25 números primos)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Números primos entre 100 y 200 (21 números primos)

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

4. Teorema: Enunciado verdadero que puede ser demostrado.

5. Conjetura: Juicio u opinión que se deduce de indicios, sospechas o síntomas: si no lo viste, lo que dices no son más que conjeturas.

Teoremas de la conjetura de Goldbach

TEOREMA 1

La suma de dos números impares siempre es par.

Demostración del TEOREMA 1

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos números *impares* tal que $\boldsymbol{a} = 2m - 1$ y $\boldsymbol{b} = 2n - 1$ siendo m y $n \in \mathbb{N}$

Sumando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

$$a + b = 2m - 1 + 2n - 1$$
$$a + b = 2m + 2n - 2$$
$$a + b = 2(m + n - 1)$$
$$a + b = 2k$$

siendo $\boldsymbol{k} = m + n - 1$

Por lo tanto

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{2k}$$

donde $\boldsymbol{2k}$ es un número *par*

TEOREMA 2

Todo número primo siempre es impar. Excepto el número 2, que es par y primo a la vez.

Demostración del Teorema 2

Sea $\boldsymbol{a}$ un número *impar* tal que $\boldsymbol{a} = 2m - 1$ siendo $m \in \mathbb{N}$

Si $\boldsymbol{a}$ es *impar* entonces $\boldsymbol{a}$ no es divisible para 2 porque

$$\frac{a}{2} = \frac{2m - 1}{2} = \frac{2m}{2} - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2} = m - 0.5$$

donde $m - 0.5$ es un número decimal

Según la definición de número *primo*, el número primo *no es par* (a excepción del número 2, que es *par* y *primo* a la vez) ya que *no es divisible* para 2.

Aplicando la propiedad de transitividad o *silogismo hipotético*:

$$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \longrightarrow r)$$

(Si un número es primo entonces no es divisible para 2) y (Si un número no es divisible para 2 entonces el número es impar) Conclusión: (Si un número es primo entonces el número es impar)

Demostrado el **Teorema 1** y el **Teorema 2** se deduce el **Teorema 3**

TEOREMA 3

La suma de dos números primos siempre es par. Excepto el número 2 que es par y primo a la vez.

TEOREMA DE SHINGRE

Todo número par mayor que 2 siempre es la suma de dos números primos.

Eddy René Shingre Mora

Para todo (∀) número par **p** mayor que 2 existe al menos (∃) dos números primos **q** y **r** tal que (/) el número par **p** es la suma de los dos números primos **q** y **r**.

$$\forall\, \boldsymbol{p} = 2k \;\; \exists\, \boldsymbol{q} = 2m - 1 \;\text{ y }\; \exists\, \boldsymbol{r} = 2n - 1 \;\;/\;\; \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$$

siendo $k + 1 = m + n$ y $m \in \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$

EJEMPLO 1

Para el número par $\boldsymbol{p} = 40$ existen los números primos $\boldsymbol{q} = 3$ y $\boldsymbol{r} = 37$

$\boldsymbol{p} = 2k \implies k = \frac{p}{2}$
$k = \frac{40}{2} = 20$
$k + 1 = 21$

$\boldsymbol{m} = 2$
$k + 1 = m + n$
$21 = 2 + n$
$\boldsymbol{n} = 19$

$\boldsymbol{q} = 2m - 1$
$\boldsymbol{q} = 2 \times 2 - 1$
$\boldsymbol{q} = 4 - 1$
$\boldsymbol{q} = 3$

$\boldsymbol{r} = 2n - 1$
$\boldsymbol{r} = 2 \times 19 - 1$
$\boldsymbol{r} = 38 - 1$
$\boldsymbol{r} = 37$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k+1}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q+r}$
40	20	21	2	19	3	37	**40**

EJEMPLO 2

Para el número par $\boldsymbol{p} = 374$ existen los números primos $\boldsymbol{q} = 7$ y $\boldsymbol{r} = 367$

$\boldsymbol{p} = 2k \implies k = \frac{p}{2}$
$k = \frac{374}{2} = 187$
$k + 1 = 188$

$\boldsymbol{m} = 4$
$k + 1 = m + n$
$188 = 4 + n$
$\boldsymbol{n} = 184$

$\boldsymbol{q} = 2m - 1$
$\boldsymbol{q} = 2 \times 4 - 1$
$\boldsymbol{q} = 8 - 1$
$\boldsymbol{q} = 7$

$\boldsymbol{r} = 2n - 1$
$\boldsymbol{r} = 2 \times 184 - 1$
$\boldsymbol{r} = 368 - 1$
$\boldsymbol{r} = 367$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k+1}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q+r}$
374	187	188	4	184	7	367	**374**

EJEMPLO 3

Para el número par $\boldsymbol{p} = 2016$ existen los números primos $\boldsymbol{q} = 17$ y $\boldsymbol{r} = 1999$

$\boldsymbol{p} = 2k \implies k = \frac{p}{2}$
$k = \frac{2016}{2} = 1008$
$k + 1 = 1009$

$\boldsymbol{m} = 9$
$k + 1 = m + n$
$1009 = 9 + n$
$\boldsymbol{n} = 1000$

$\boldsymbol{q} = 2m - 1$
$\boldsymbol{q} = 2 \times 9 - 1$
$\boldsymbol{q} = 18 - 1$
$\boldsymbol{q} = 17$

$\boldsymbol{r} = 2n - 1$
$\boldsymbol{r} = 2 \times 1000 - 1$
$\boldsymbol{r} = 2000 - 1$
$\boldsymbol{r} = 1999$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{k+1}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q+r}$
2016	1008	1009	9	1000	17	1999	**2016**

Diferencia entre Conjetura y Teorema

Las palabras “puede escribirse” y “siempre” son opuestas entre sí.
La primera no afirma *nada* y la segunda lo afirma *todo*.
He ahí la diferencia entre *conjetura* y *teorema*.
Eddy René Shingre Mora